LXI Olimpiada Matemática Española

Concurso Final Nacional

Gijón, 28 y 29 de marzo de 2025

PROBLEMAS y SOLUCIONES

Problema 1: *Determina razonadamente la cantidad de valores distintos que aparecen en la suceción*

$$\left\lfloor \frac{2025}{1} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{2025}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{2025}{3} \right\rfloor, \ldots, \left\lfloor \frac{2025}{2024} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{2025}{2025} \right\rfloor.$$

Solución: La respuesta es 89. Antes de nada, observemos que $2025 = 45^2$. La idea clave es separar la secuencia de fracciones

$$\frac{2025}{2025}, \frac{2025}{2024}, \frac{2025}{2023}, \ldots, \frac{2025}{2}, \frac{2025}{1}$$

en dos bloques con distinto comportamiento, y contar los bloques por separado.

Afirmación. Sea a un entero positivo, $1 \leq a \leq 2025$. Entonces

$$\frac{2025}{a} - \frac{2025}{a+1} < 1$$

si y solo si $a \geq 45$.

Demostración: Observemos que

$$\frac{2025}{a} - \frac{2025}{a+1} < 1 \iff \frac{2025}{a(a+1)} < 1 \iff 2025 < a(a+1)$$

Si $a \geq 45$, esa desigualdad es cierta, ya que $a(a+1) \geq 45 \cdot 46 > 2025$.

Si $a \leq 44$, la desigualdad es falsa, ya que $a(a+1) \leq 44 \cdot 45 < 2025$. $\square$

Por la Afirmación sabemos que cualesquiera dos fracciones $\frac{2025}{a}$ siendo $a = 1, 2, ..., 45$ difieren en al menos una unidad. Por lo tanto, los 44 suelos

$$\left\lfloor \frac{2025}{1} \right\rfloor, \quad \left\lfloor \frac{2025}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{2025}{3} \right\rfloor, ..., \quad \left\lfloor \frac{2025}{44} \right\rfloor$$

son todos distintos y mayores que $\left\lfloor \frac{2025}{45} \right\rfloor$.

Consideramos ahora la secuencia creciente

$$s = \left(\frac{2025}{2025}, \frac{2025}{2024}, ..., \frac{2025}{45} \right).$$

Por la Afirmación, la diferencia entre dos elementos consecutivos de s es menor que 1. Por lo tanto, entre los suelos

$$\left\lfloor \frac{2025}{45} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{2025}{46} \right\rfloor, ..., \left\lfloor \frac{2025}{2025} \right\rfloor$$

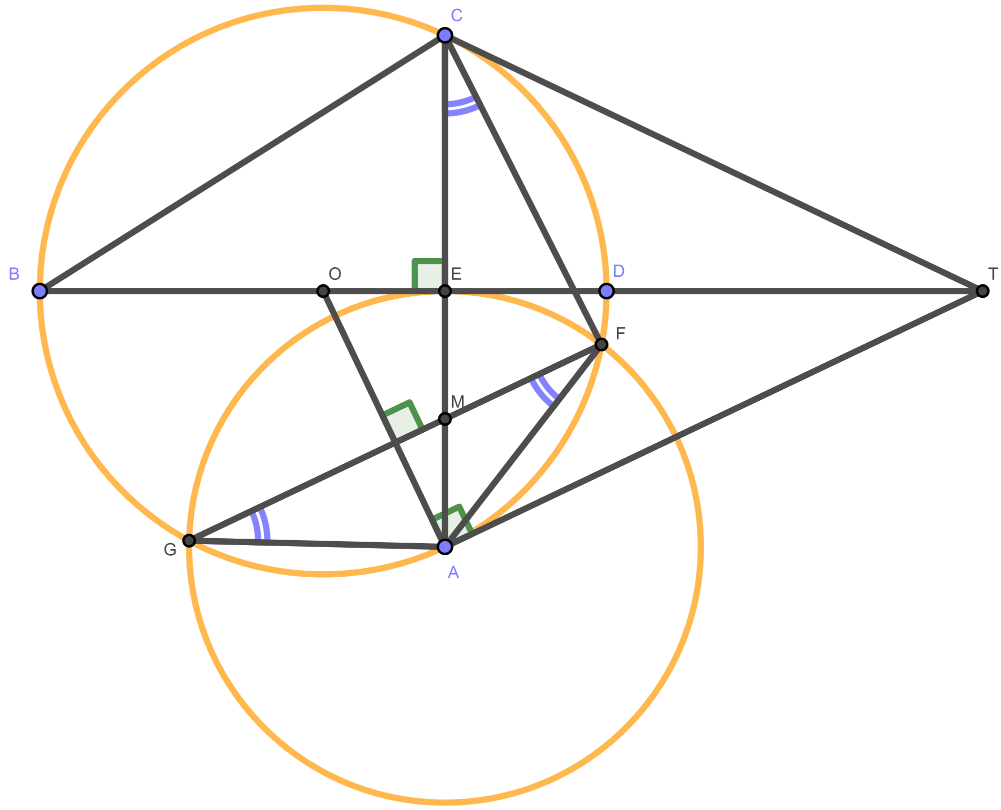
se cubren exactamente los 45 enteros positivos

$$\left\lfloor \frac{2025}{45} \right\rfloor = 45, 44, 43, ..., 2, 1 = \left\lfloor \frac{2025}{2025} \right\rfloor$$

Por supuesto, si nos saltáramos alguno de estos, nos comportaría un salto mayor que 1 en dos términos consecutivos de s, que es imposible. Por lo tanto, el número de enteros distintos entre los suelos dados es $44 + 45 = 89$. $\square$

Problema 2: *El cuadrilátero cíclico $ABCD$ inscrito en la circunferencia Γ verifica $AB = BC$ y $CD = DA$, y E es el punto de intersección de las diagonales AC y BD. La circunferencia de centro A y radio AE corta a Γ en dos puntos F y G. Demuestra que la recta FG es tangente a las circunferencias de diámetros BE y DE.*

Solución 1:



Comenzamos observando que las condiciones $AB = BC$ y $CD = DA$ implican que la recta BD es la mediatriz de CA, por lo tanto $BD \perp AC$, y BD es un diámetro de Γ. Además, E es el punto medio de AC, y el centro O de Γ coincide con el punto medio de BD. Por ser OA mediatriz de GF, es claro que $OA \perp FG$. Sea M el punto de intersección de las rectas AC y FG.

A continuación probaremos que M es el punto medio de AE. En efecto, las igualdades

$$\angle MFA = \angle AGF = \angle ACF$$

muestran que los triángulos AMF y AFC son semejantes, y $AM/AE = AM/AF = AF/AC = AE/AC = 1/2$, es decir, M es el punto medio de AE.

Construimos ahora el punto T de la recta BD tal que TA y TC son tangentes a Γ (se estudiará aparte qué ocurre cuando T no está definido). Veamos que B y D son, en algún orden, el incentro y el T-exincentro del triángulo TAC. Asumiendo $BC > CD$ como en la figura, tenemos que TD es bisectriz interior de $\angle CTA$, y además:

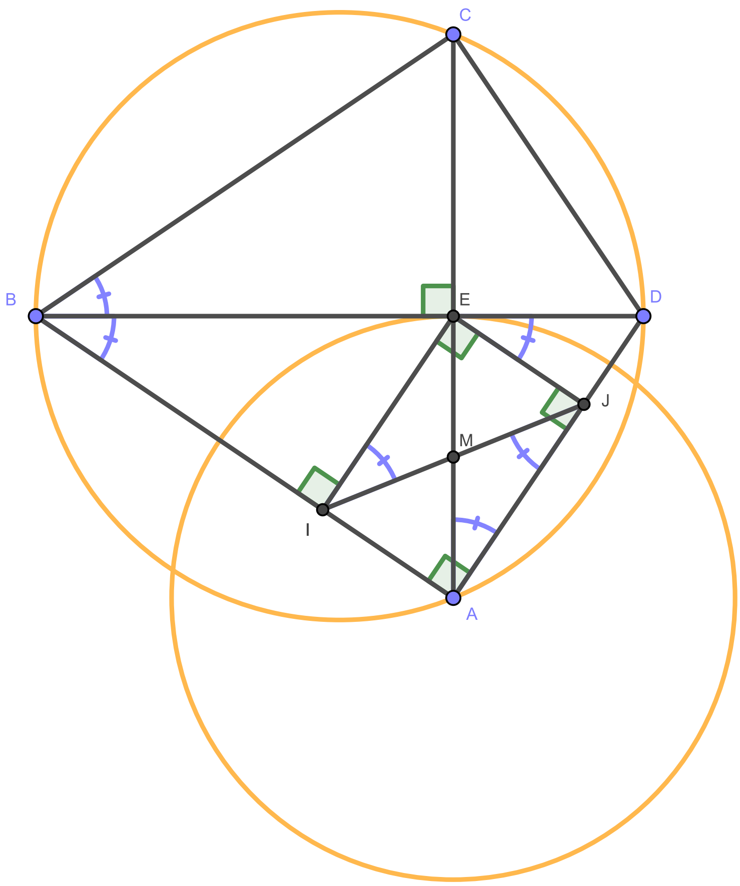
$$\angle ACD = \angle ABD = \angle DBC = \angle DCT,$$

luego D es intersección de dos bisectrices interiores del triángulo TAC, es decir, D es el incentro de TAC, y B es el $T-$exincentro (en el caso $BC < CD$ se tendría que B es el $T-$exincentro y D el incentro).

En particular, la circunferencia de centro D y radio DE es tangente a la recta AT. Aplicando una homotecia h de centro E y razón $1/2$, se tiene que la circunferencia de diámetro DE es tangente a la recta FG. Análogamente, al ser B el $T-$exincentro de TAC, la circunferencia de centro B y radio BE es tangente a AT, y la homotecia h asegura que la circunferencia de diámetro BE es tangente a FG.

Finalmente, el único caso en que T no está definido es cuando $ABCD$ es un cuadrado. En este caso $E = O$; AEF y AEG son triángulos equiláteros y el problema es casi inmediato. $\square$

Solución 2:



Como en la solución anterior, deducimos que BD es mediatriz de AC y diámetro de Γ, y E es el punto medio de AC. A continuación, construimos I y J como las proyecciones ortogonales de E sobre las rectas AB y AD, respectivamente. El plan consistirá en probar que la recta IJ es tangente a las circunferencias de diámetros BE y DE (en los puntos I y J), y contiene a los puntos F y G.

Por ser $AIEJ$ un rectángulo, es claro que I y J están en las circunferencias de diámetros BE y DE, respectivamente, y el punto $M = AE \cap IJ$ es el punto medio común de AE y de IJ, y es el centro de la circunferencia que contiene al rectángulo. Además, se tiene que:

$$\angle JIE = \angle JAE = 90^o - \angle EAB = \angle ABE,$$

$$\angle IJA = \angle JIE = \angle JAE = \angle JED.$$

Esto prueba (por ángulos semiinscritos) que la recta IJ es tangente a las circunferencias de diámetros BE y DE.

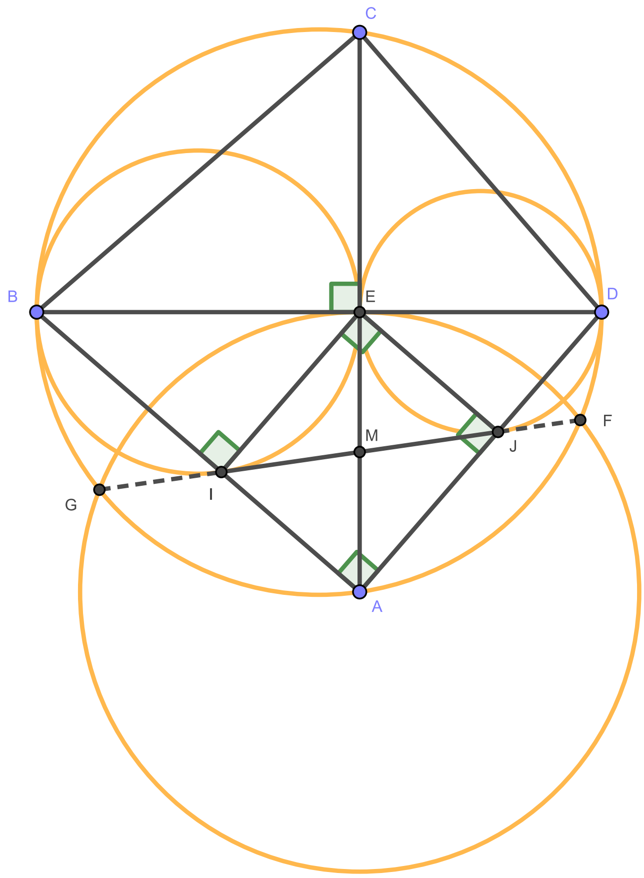
Para ver que I, J, F, G están alineados, observamos que la recta FG es el eje radical entre Γ y la circunferencia ω de centro A y radio AE. Por lo tanto, basta probar que I, J tienen igual potencia a Γ y ω. Veamos la igualdad de las potencias (con signo):

$$Potencia\ (I, \Gamma) = -IA \cdot IB = -IE^2 = IA^2 - AE^2 = Potencia(I, \omega),$$

$$Potencia\ (J, \Gamma) = -JA \cdot JD = -JE^2 = JA^2 - AE^2 = Potencia(J, \omega),$$

como queríamos demostrar. □

Solución 3:



Como en la solución anterior, deducimos que BD es mediatriz de AC y diámetro de Γ, y E es el punto medio de AC. A continuación, construimos I y J como las proyecciones ortogonales de E sobre las rectas AB y AD, respectivamente. El plan consistirá en probar que la recta IJ es tangente a las circunferencias de diámetros BE y DE (en los puntos I y J), y contiene a los puntos F y G.

Llamamos ω a la circunferencia de centro A y radio AE, ω_B a la de diámetro BE y ω_D a la de diámetro DE. Aplicaremos una inversión respecto a ω. Por construcción, I está en ω_B, J está en ω_D y AE es una tangente común a ω_B y ω_D, por lo que igualamos las potencias desde A a ω_B y ω_D:

$$AB \cdot AI = AE^2 = AD \cdot AJ,$$

lo que nos proporciona las parejas de inversos (B, I) y (D, J). En particular, la circunferencia Γ (que pasa por A, B, D) se transforma en la recta IJ, y las circunferencias ω_B y ω_D son invariantes. Además, por tener Γ, ω_B y ω_D sus centros alineados en la recta BD, se tiene que Γ es tangente a ω_B en B y a ω_D en D. Aplicando la inversión, se deduce que la recta IJ es tangente a ω_B en I y a ω_D en J.

Finalmente, al estar los cuatro puntos B, D, F, G en Γ (circunferencia que pasa por A, el centro de inversión) se concluye que sus imágenes I, J, F, G son colineales, como queríamos probar. $\square$

Problema 3: *Escribimos las expresiones decimales de los números* $\sqrt{2}$ *y* $\sqrt{3}$ *como*

$$\sqrt{2} = 1, a_1a_2a_3... \qquad \sqrt{3} = 1, b_1b_2b_3...$$

donde cada a_i *o* b_i *es una cifra de* 0 *a* 9*. Demuestra que existen al menos* 1000 *valores de* i *entre* 1 *y* 10^{1000} *tales que* $a_i \neq b_i$*.*

Solución: Afirmamos que para cada entero positivo k, existe un valor de i con $k+1 \leq i \leq 10k$ tal que $a_i \neq b_i$. Esto implica el enunciado, ya que los valores de i para $k \in 10^0, 10^1, ..., 10^{999}$ son distintos.

Supongamos que para algún k no se cumple esta propiedad. En este caso, el número $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ tendría las cifras decimales entre $k+1$ y $10k$ todas iguales a 0 o todas iguales a 9. En cualquier caso, redondeando al múltiplo de 10^{-k} más cercano, tenemos que $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ se puede expresar como $\frac{r}{s}+\epsilon$, donde $s = 10^k$, r es entero positivo menor que 10^k, y ϵ es un número real con $|\epsilon| < 10^{-10k}$. Elevando al cuadrado,

$$5 - 2\sqrt{6} = (\sqrt{3}-\sqrt{2})^2 = \big(\frac{r}{s}+\epsilon\big)^2 = \frac{r^2}{s^2} + 2\frac{\epsilon r}{s} + \epsilon^2 = \frac{r^2}{s^2} + \delta$$

donde $|\delta| \leq 3 \cdot 10^{-10k}$. Cambiando de lado el 5 y elevando al cuadrado de nuevo, obtenemos que

$$24 = \Big(\frac{r^2}{s^2} - 5 + \delta\Big)^2 = \frac{\big(r^2-5s^2\big)^2}{s^4} + 2\delta\Big(\frac{r^2}{s^2}-5\Big) + \delta^2 = \frac{\big(r^2-5s^2\big)^2}{s^4} + \gamma$$

donde $|\gamma| \leq 20 \cdot 10^{-10^k}$.

Multiplicando por s^4 y reordenando términos, tenemos que

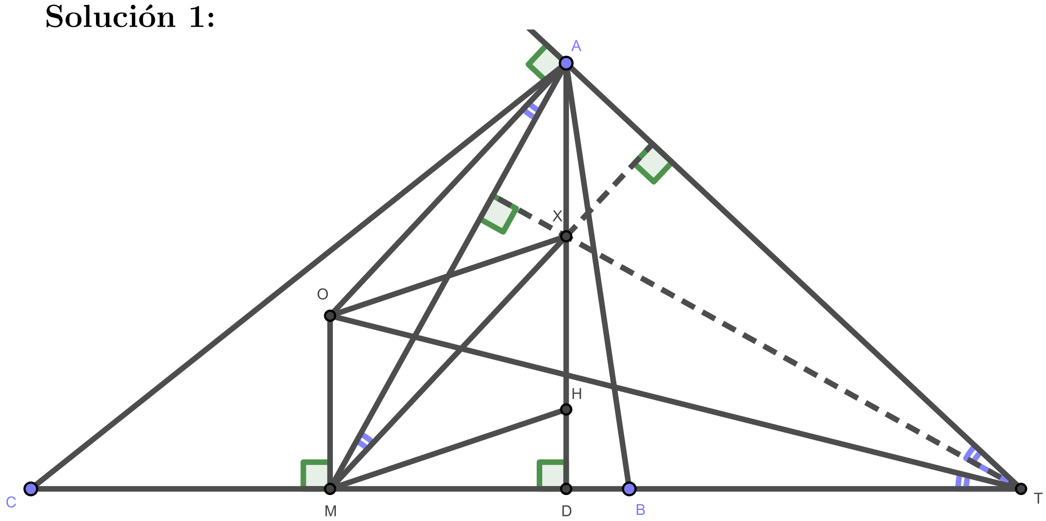
$$24s^4 - (r^2-5s^2)^2 = \gamma s^4.$$

Puesto que $24s^4$ no es cuadrado perfecto, γ no puede ser nulo. Como el lado izquierdo de la expresión es entero, el lado derecho también lo es. Pero $0 < |\gamma s^4| \leq 20 \cdot 10^{-6k} < 1$, contradicción. Concluimos que algún i entre $k+1$ y $10k$ satisface que $a_i \neq b_i$, como queríamos demostrar. $\square$

COMENTARIO: El problema se puede resolver usando el teorema del valor intermedio. En efecto, con las notaciones anteriores, si consideramos el polinomio $p(x) = x^4 - 10x^2 + 1$, tenemos que $p(\sqrt{3}-\sqrt{2}) = 0$. Además, $|p(r/s)| \geq 1/s^4$, y $|p'(x)|$ está acotado por 20 en el intervalo $[0,1]$. Por lo tanto, $|\sqrt{3}-\sqrt{2}-r/s| \geq |p(\sqrt{3}-\sqrt{2}) - p(r/s)|/20 \geq 1/(20s^4)$.

Problema 4: *Sea ABC un triángulo acutángulo con circuncentro O y ortocentro H, verificando $AB < AC$. La tangente en A a la circunferencia circunscrita de ABC corta a BC en T. Sea X el punto medio de AH. Demuestra que $\angle ATX = \angle OTB$.*

Solución 1:



La condición $AB < AC$ implica que T pertenece a la prolongación de BC más allá de B, como indica la figura. Sea M el punto medio de BC.

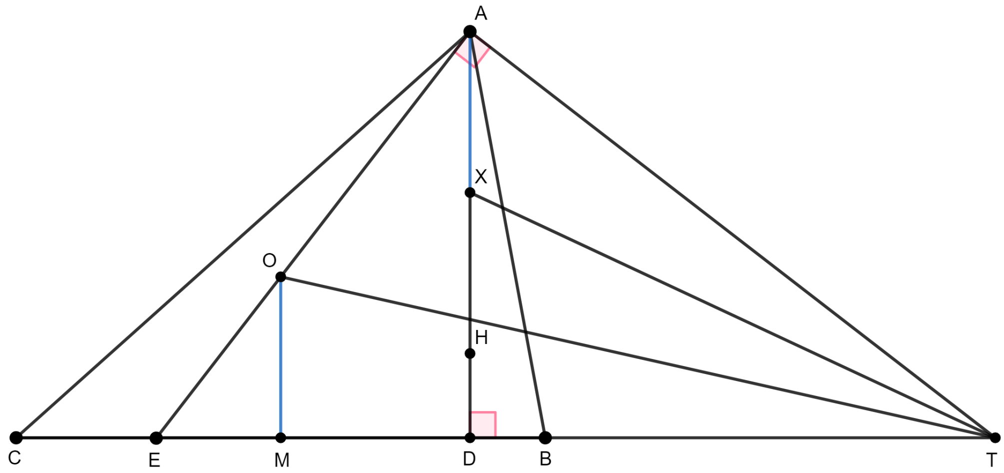
Es sabido que el triángulo formado por los puntos medios de los lados de ABC es semejante al original, con razón $1/2$, y su ortocentro es O. Por lo tanto, $OM = AH/2 = AX = XH$. En particular, $AXMO$ es un paralelogramo pues los lados opuestos AX y OM son paralelos y de igual longitud. Entonces se cumple $MX \,||\, OA$, y como $OA \perp AT$, se tiene que $MX \perp AT$, es decir, MX es la altura de M en el triángulo AMT. Además, $AX \perp MT$, por lo tanto X es intersección de dos alturas de AMT, debe coincidir con el ortocentro, y la altura de T debe pasar por X, esto es, $TX \perp AM$.

Para completar la solución del problema, observamos que el cuadrilátero $MOAT$ es cíclico, inscrito en la circunferencia de diámetro OT, y utilizaremos en el momento oportuno la condición $OA \,||\, MX$, además de otras igualdades inmediatas:

$$\angle ATX = 90^o - \angle MAT = \angle XMA = \angle OAM = \angle OTM = \angle OTB.$$

$\square$

Solución 2:



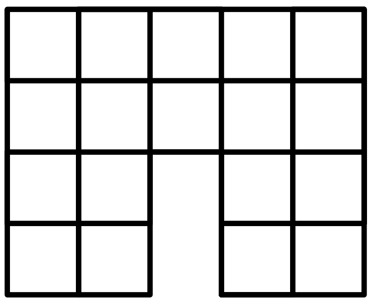
Sumando a ambos lados $\angle XTO$, el enunciado es equivalente a $\angle ATO = \angle XTB$. Sea D el pie de la altura desde A. Vamos a demostrar que los triángulos ATO y DTX son semejantes, lo que implica la igualdad deseada.

Sea E el punto de intersección de AO y BC. Los triángulos rectángulos ATE y DTA tienen dos ángulos en común, luego son semejantes. Para demostrar nuestra afirmación, basta con probar que O y X son puntos equivalentes en la semejanza, es decir, que $EO/EA = AX/AD$. Sea M el punto medio de BC. Como OM y AD son perpendiculares a BC y por tanto paralelas entre sí, los triángulos EOM y EAD son semejantes, y $EO/EA = OM/AD = AX/AD$, donde usamos $OM = AX$ como en la solución anterior. $\square$

Problema 5: *Sea S un conjunto finito de casillas de una cuadrícula. En cada casilla de S colocamos un saltamontes. Cada saltamontes puede mirar hacia arriba, abajo, izquierda o derecha. Una disposición de saltamontes es* asturiana *si, cuando cada saltamontes avanza una casilla en la dirección en la que mira, cada casilla de S sigue conteniendo un saltamontes.*

a) *Demuestra que, para cualquier conjunto S, el número de disposiciones asturianas es un cuadrado perfecto.*

b) Calcula el número de disposiciones asturianas si S es el siguiente conjunto:

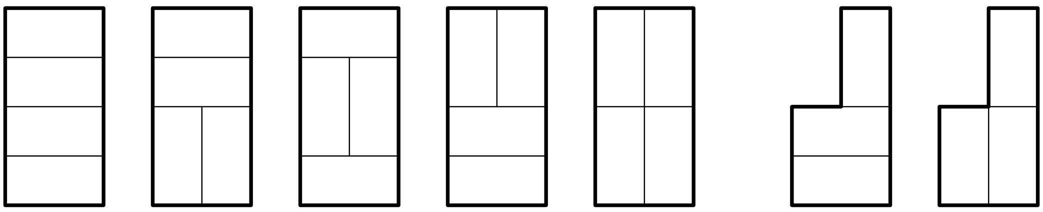


Solución: Probaremos que la figura tiene 2025 disposiciones asturianas.

Afirmamos que el número de disposiciones asturianas de S es el cuadrado del número de formas de teselar S con dominós (piezas de 2×1). Para ello, coloreamos las casillas de la cuadrícula de blanco y negro como en un tablero de ajedrez. Obsérvese que cada saltamontes que comienza en una casilla blanca se mueve a una casilla negra, y viceversa. Si seguimos el movimiento de los saltamontes que comienzan en una casilla blanca, obtenemos una teselación de S: cada dominó está formado por la casilla de salida y la de llegada de un saltamontes que empieza en casilla blanca; lo mismo ocurre si seguimos el movimiento de los saltamontes que comienzan en casillas negras, obtenemos una teselación de S: cada dominó está formado por la casilla de salida y la de llegada de un saltamontes que empieza en casilla negra. De la misma manera, para cada pareja (T_1, T_2) de teselaciones, podemos usar T_1 para orientar los saltamontes de las casillas blancas y T_2 para orientar los saltamontes de las casillas negras, de forma que el resultado es una disposición asturiana. Como ambos procedimientos son inversos el uno del otro, hemos demostrado nuestra afirmación. El apartado a) se deduce inmediatamente.

Para demostrar el apartado b), necesitamos comprobar que S tiene exactamente 45 teselaciones. Consideramos las dos casillas de la columna central. En cada teselación, o bien estas casillas forman un dominó, o bien ambas están unidas a la casilla a su izquierda, o bien ambas están unidas a la casilla a su derecha (no es posible que una esté unida a su izquierda y la otra a su derecha, ya que esto dividiría el resto de S en dos piezas de tamaño impar, que no se pueden cubrir con dominós).

Si las dos casillas forman un dominó, cada uno de los rectángulos de tamaño 2×4 se puede teselar de cinco maneras, mientras que si ambas están unidas a la pieza de su lado, el rectángulo 2×4 se puede teselar de cinco maneras y la otra pieza de dos maneras. Véase el gráfico:



El número total de teselaciones es $5 \times 5 + 2 \times 5 + 5 \times 2 = 45$, luego el número de disposiciones asturianas es $45^2 = 2025$. $\square$

Problema 6: *Sea* $\mathbb{R}_{\neq 0}$ *el conjunto de números reales distintos de* 0*. Halla todas las funciones* $f : \mathbb{R}_{\neq 0} \to \mathbb{R}_{\neq 0}$ *tales que, para todo* $x, y \in \mathbb{R}_{\neq 0}$*,*

$$(x-y)f(y^2) + f\left(xy\, f\left(\frac{x^2}{y}\right)\right) = f(y^2 f(y)).$$

Solución: La única solución es $f(x) = -1/x$. Se comprueba fácilmente que esta función satisface la ecuación del enunciado.

En primer lugar, observamos que, dado que 0 no está contenido en la imagen de f, el término $f\Big(xyf(x^2/y)\Big)$ de la ecuación del enunciado no puede ser nunca nulo. Esto quiere decir que, para cualesquiera x, y, distintos de cero, $(x-y)f(y^2) \neq f(y^2 f(y))$. Por lo tanto, para todo y, si despejamos el valor de x que da la igualdad en esta expresión, que es

$$x = \frac{yf(y^2) + f(y^2 f(y))}{f(y^2)}$$

y que existe por ser $f(y^2) \neq 0$, se tiene que cumplir que $x = 0$. Por lo tanto concluimos que $yf(y^2) = -f(y^2 f(y))$ para todo $y \in \mathbb{R}_{\neq 0}$. Sumando esta ecuación a la original obtenemos, para todo x, $y \in \mathbb{R}_{\neq 0}$,

$$xf(y^2) + f\left(xy\, f\left(\frac{x^2}{y}\right)\right) = 0.$$

De esta ecuación se deduce que, si una pareja de valores x, y cumple que $y^2 = xyf(x^2/y)$, entonces $x = -1$ (usamos aquí también que $f(y^2) \neq 0$).

Finalmente, vamos a demostrar que $f(t) = -1/t$ para todo $t \in \mathbb{R}_{\neq 0}$. Para ello queremos encontrar valores de x, y tales que

$$x^2/y = t \qquad y^2 = xyf(x^2/y) = xyf(t).$$

Resolviendo la ecuación, podemos tomar $x = tf(t)$ e $y = tf(t)^2$. Como estos valores cumplen que $y^2 = xyf(x^2/y)$, tenemos que $-1 = x = tf(t)$, luego $f(t) = -1/t$, tal y como queríamos demostrar. $\square$